entonces la solución general es:

$$p_t^e = \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)^i p_{t-i-1} \quad (2.31)$$

2.3. Una Técnica Sencilla de Solución de Modelos de Expectativas Racionales

A continuación se plantea un conjunto de reglas básicas a través de las cuales se expresa la hipótesis de expectativas racionales.

2.3.1. Ley de las Proyecciones Iterativas

La idea detrás de esta regla es que la proyección del comportamiento futuro de cualquier variable X se encuentra restringida por la información disponible en el período actual. Esto significa que en cualquier ejercicio donde aparezca como parte de la solución del mismo la expectativa que construirán los individuos en el futuro próximo de una cierta variable, dicha proyección deberá restringirse a la disponibilidad de antecedentes que actualmente tienen éstos. Un ejemplo ilustrativo de esta regla surge de la teoría de determinación de precios de activos. De acuerdo con ésta, el precio contemporáneo de un activo depende del precio que se estima prevalecerá el período próximo, y del siguiente y posteriores. Sin embargo, dichas estimaciones para los períodos siguientes, construidas en un cierto período "t", sólo pueden tener como antecedente informacional la disponibilidad de éstas en el mismo período "t".

Luego, si se trata de estimar lo que puede ser la expectativa futura de los agentes con respecto al valor de una cierta variable X en un período posterior, de acuerdo a la "Ley de Proyecciones Iterativas" debe cumplirse que:

$$E\left[E\left(X_{t+j+1} \mid I_{t+j}\right) \mid I_t\right] = E\left[X_{t+j+1} \mid I_t\right]$$

donde $E\,[X_{t+j} \mid I_t]$ refleja la proyección de la variable X en $t + j$, condicional a la matriz de información disponible en "t".

2.3.2. Los Agentes Racionales No Malgastan la Información

El uso eficiente de la información disponible implica que los errores de estimación que cometan los agentes tienen covarianza cero con la información disponible al momento de construir la expectativa. Así, si la información contenida en la variable Z se encuentra incorporada en la matriz "I_t", debe cumplirse que:

$$E\left[\left(X_{t+1} - E\left[X_{t+1} \mid I_t\right]\right) Z_t\right] = 0$$

2.3.3. Técnica de los Coeficientes Indeterminados

En los problemas N° 1 y N° 2 la construcción de expectativas racionales atravesó por la proyección de una variable determinada, coherente con la distribución objetiva de probabilidades de la cual ésta surge. Esta estrategia expresa el planteamiento original de Muth, en cuanto a que las expectativas son racionales en la medida en que son esencialmente las predicciones que se desprenden de la teoría relevante, representada por la distribución objetiva –"verdadera"– de la variable. En términos generales, la racionalidad del proceso de construcción de expectativas se expresará entonces en la identificación por parte de los individuos de la "teoría correcta". Además, los parámetros que vinculan las variables exógenas, que de acuerdo con la teoría explican aquella variable que nos interesa proyectar, deben incorporar la información relativa a la estructura estocástica de la economía. Ilustraremos esta estrategia a través de la resolución de algunos ejercicios. Para ello, en primer lugar se presenta la técnica de "coeficientes indeterminados"[10], la que surge de la hipótesis de que los individuos son capaces de identificar las reglas del juego en el cual participan, lo que en otras palabras es equivalente a decir que conocen la teoría relevante para explicar el comportamiento de la variable que interesa proyectar.

Problema N° 3

Consideremos una ecuación de movimiento para una cierta variable X como la indicada en (2.32). La variable μ es un shock aleatorio cuyo comportamiento

se describe en (2.33). La solución de este problema consiste en construir la expectativa racional de X_{t+1}, dado (2.32) y (2.33).

$$X_t = \alpha_0 + a_1 E_t X_{t+1} + \mu_t \tag{2.32}$$

$$\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\rho| < 1;\ E_t\varepsilon_{t+1} = 0 \ \text{ y } \ E_t(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) = 0 \tag{2.33}$$

De las ecuaciones mencionadas se desprende que el comportamiento de X se encuentra determinado por la "conjetura" expresada en (2.34). Esta "conjetura" representa nuestra teoría para la variable X, dada la información indicada en (2.32) y (2.33).

$$X_t = \phi_0 + \phi_1\,\mu_{t-1} + \phi_2\,\varepsilon_t \tag{2.34}$$

dado ello se obtiene:

$$E_t X_{t+1} = \phi_0 + \phi_1\,(\rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t) \tag{2.35}$$

lo que permite reemplazar estas dos ecuaciones (2.34) y (2.35) en (2.32).

$$\phi_0 + \phi_1\mu_{t-1} + \phi_2\varepsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1\,\{\phi_0 + \phi_1\,(\rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t)\} + \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.36}$$

de aquí es posible resolver los "coeficientes racionales":

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \phi_0 = \alpha_0 + \alpha_1\phi_0 \\ \text{b) } \phi_1 = \alpha_1\phi_1\rho + \rho \\ \text{c) } \phi_2 = 1 + \alpha_1\phi_1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \phi_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \\ \phi_1 = \frac{\rho}{1-\alpha_1\rho} \\ \phi_0 = \frac{1}{1-\alpha_1\rho} \end{array}$$

Dado lo anterior, se tiene que la solución del problema planteado es (2.37), que también se puede escribir como se indica en (2.38).

$$X_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\rho}{1-\alpha_1\rho}\mu_{t-1} + \frac{1}{1-\alpha_1\rho}\varepsilon_t \tag{2.37}$$

$$X_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\,\frac{\varepsilon_{t-i}}{1-\alpha_1\rho} \tag{2.38}$$

Problema N°4

A continuación se examina un ejercicio con un mayor contenido económico. La técnica de solución es idéntica a la utilizada en el problema anterior.

En (2.39) se plantea una ecuación de demanda de dinero "a la Cagan", la que se encuentra expresada en logaritmos. La tarea consiste en resolver de un modo "racional" la expectativa de inflación inserta en la ecuación mencionada. La utilización de la hipótesis de expectativas racionales se expresa al plantear que $\Delta P^e_{t+1} = E(\Delta P_{t+1} \mid I_t) = E_t\Delta P_{t+1}$.

$$m_t - P_t = \gamma + \alpha\Delta P^e_{t+1} + \mu_t$$

donde

$$\alpha < 0 \ \text{ y } \ E_t\mu_{t+1} = 0 \quad E\mu_t\mu_{t-1} = 0 \tag{2.39}$$

$$m_t - P_t = \gamma + \alpha E_t\Delta P_{t+1} + \mu_t \tag{2.40}$$

En la resolución de este problema se utiliza el antecedente de que $\Delta P_{t+1} = P_{t+1} - P_t$.

Para determinar la trayectoria del nivel de precios se asume la existencia de equilibrio en el mercado monetario (2.41), el que se logra precisamente a través de cambios en el nivel de precios. De aquí se resuelve para el nivel de precios de equilibrio (2.42).

$$m_t = \gamma + \alpha E_t P_{t+1} + P_t(1-\alpha) + \mu_t \tag{2.41}$$

$$P_t = \frac{m_t - \gamma - \alpha E_t P_{t+1} - \mu_t}{1-\alpha} \tag{2.42}$$

Adelantando la ecuación (2.42), y utilizando la "ley de las proyecciones iterativas", se puede obtener una expresión para el término $E_t P_{t+1}$:

$$E_t P_{t+1} = \frac{E_t[m_{t+1} - \gamma - \alpha E_{t+1}P_{t+2} - \mu_{t+1}]}{1-\alpha} = \frac{E_t[m_{t+1} - \gamma - \alpha P_{t+2}]}{1-\alpha} \tag{2.43}$$

Dado lo anterior se obtiene la expresión del nivel de precios que equilibra el mercado del dinero, en función de la política monetaria presente y la expectativa del comportamiento futuro de ésta, como se indica en (2.44), (2.45) y (2.46).

$$P_t = \frac{1}{1-\alpha}\left[m_t - \gamma - \frac{\alpha}{1-\alpha}\{E_t m_{t+1} - \gamma - \alpha E_t P_{t+2}\} - \mu_t\right] \quad (2.44)$$

$$P_t = \frac{m_t}{1-\alpha} - \frac{\gamma}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}E_t m_{t+1} - \frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)^2} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 E_t P_{t+2} - \cdots \quad (2.45)$$

$$P_t = \frac{m_t - \gamma(1-\alpha) - \mu_t + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) E_t m_{t+1} + \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 E_t m_{t+2} + \ldots}{1-\alpha} \quad (2.46)$$

La expresión (2.46) tiene el atractivo de expresar el comportamiento presente de los precios en función de la trayectoria esperada de la política monetaria, lo que representa una generalización de la teoría monetaria del ingreso nominal. Sin embargo ésta no es una "solución cerrada", en la medida en que aún no se ha establecido en forma precisa el proceso de formación de expectativas. Para lograr esto es necesario realizar supuestos específicos con respecto al proceso estocástico de acuerdo con el cual se conduce la política monetaria. Este supuesto se expresa en una regla monetaria como la descrita en (2.47).

$$m_t = \lambda_0 + \lambda_1 m_{t-1} + e_t \quad (2.47)$$

dado ello,

$$E_t m_{t+1} = \lambda_0 + \lambda_1 m_t \qquad \text{donde } E_t e_{t+j} = 0 \quad \forall_{j\neq 0} \quad (2.48)$$

Dado (2.46), (2.47) y (2.48) es posible realizar la conjetura de solución de (2.49), para ciertos coeficientes ø's, a determinar.

$$P_t = \phi_0 + \phi_1 m_{t-1} + \phi_2 \mu_t + \phi_3 e_t \quad (2.49)$$

De aquí se desprende que:

$$E_t P_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 m_t \quad (2.50)$$

Reemplazando en (2.42) se tiene un problema similar a los anteriores, en cuanto a que la solución de los coeficientes ø's es inmediata. De la igualación de coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned} &a)\ \alpha\phi_1\lambda_1 + (1-\alpha)\ \phi_1 = \lambda_1 \\ &b)\ (1-\alpha)\ \phi_2 + 1 = 0 \\ &c)\ \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\ \phi_3 = 1 \\ &d)\ \gamma + \alpha\phi_0 + \alpha\phi_1\lambda_0 + (1-\alpha)\ \phi = \lambda_0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} &a)\ \phi_1 = \frac{\lambda_1}{1-\alpha+\alpha\lambda_1} \\ &b)\ \phi_2 = \frac{-1}{1-\alpha} \\ &c)\ \phi_3 = \frac{1}{1-\alpha+\alpha\lambda_1} \\ &d)\ \phi_0 = \frac{\lambda_0(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha\lambda_1} - \gamma \end{aligned} \quad (2.52)$$

Luego, la solución para el nivel de precios:

$$P_t = \left(\frac{\lambda_0(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha\lambda_1} - \gamma\right) + \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha+\alpha\lambda_1} - \gamma\right) m_{t-1} - \frac{1}{1-\alpha}\mu_t + \left(\frac{1}{1-\alpha+\alpha\lambda_1}\right) e_t \quad (2.53)$$

2.3.4. Interpretación

Una importante implicancia del problema N° 4 es que en la medida en que se adopta la hipótesis de expectativas racionales, la ecuación del nivel de precios es fuertemente dependiente de la regla de política monetaria del Banco Central. Esto significa que la estabilidad de ecuaciones econométricas dirigidas a proyectar el comportamiento futuro de la inflación dependerá de la permanencia del

a) $m = \gamma + \phi_0 + \alpha\phi_2\phi_0$

b) $0 = \alpha\phi_2\phi_1 + \alpha\phi_3 + (1-\alpha)\ \phi_1 + 1$

c) $0 = \alpha\phi_2^2 + (1-\alpha)\ \phi_2$

d) $0 = \alpha\phi_2\phi_3 + (1-\alpha)\ \phi_3$

Dado que la "anomalía" en este ejercicio surge en los últimos dos términos de la conjetura, trabajaremos con las ecuaciones c) y d). De c) se desprenden dos soluciones posibles para ϕ_2:

$$\text{i) } \phi_2 = 0, \quad \text{lo que } \Rightarrow \ \phi_3 = 0$$

En este caso el problema que planteaba la conjetura irracional desaparece al eliminarse la influencia de las variables teóricamente improcedentes.

La segunda solución posible es:

$$\text{ii) } \alpha\phi_2 + (1-\alpha) = 0 \ \Rightarrow \ \phi_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Si se adopta la segunda solución para ϕ_2, al reemplazar en d) se obtienen infinitas soluciones compatibles con dicha ecuación:

$$\text{d) } 0 = (\alpha - 1)\ \phi_3 + (1-\alpha)\ \phi_3$$

Luego, la irracionalidad implícita en la conjetura produce soluciones múltiples en el modelo, al mismo tiempo que se plantea una solución explosiva dado que $\phi_2 = \frac{(\alpha-1)}{\alpha}$, y que $\alpha < 0$, por lo que $\frac{dP_{t+1}}{dP_t} > 1$.

Este tipo de efectos suele denominarse como "burbujas", en cuanto el sistema produce un crecimiento, o decrecimiento acelerado, el que ante un cambio exógeno puede revertirse violentamente[14].

[14] La burbuja se "pincha".

Problema de Extracción de Señales

Un tipo de problemas que habitualmente enfrentan los agentes económicos consiste en estimar el comportamiento de variables que no son directamente observables, a partir de la evolución exhibida por variables relacionadas. Así por ejemplo, es bien conocido el hecho de que agentes racionales determinarán su estrategia óptima de consumo y ahorro sobre la base de la evolución esperada de los salarios y tasas de interés reales. Sin embargo, en el corto plazo es habitual que tanto los salarios reales como la tasa de interés real se encuentren "ocultos" dentro de sus correspondientes variables nominales. Luego es necesario utilizar la información disponible para identificar el componente que nos interesa dentro de una suma de variables. Este se conoce como un "problema de extracción de señales".

La resolución de un problema de extracción de señales es análoga al análisis de regresión, donde se utiliza el método de las proyecciones mínimo cuadráticas. Sin embargo, en este caso –la extracción de señales– no interesa la estimación de parámetros, sino la estimación de variables no observadas, como se indicó anteriormente. Se supone que los individuos conocen la distribución de la variable a estimar, al igual que la de las series relacionadas. Esto es, se supone que los individuos conocen la estructura del modelo. En el Anexo 2 de este capítulo se realiza una presentación formal del método de solución de problemas de extracción de señales, haciendo uso del método de las regresiones lineales mínimo cuadráticas.

Para ilustrar la forma en que se resuelve este tipo de problemas, consideremos el siguiente ejercicio.

Supongamos que el agente económico está interesado en estimar la variable aleatoria ω, pero sólo observa W. Se sabe que $W = \omega + p$, y que:

$$E\omega p = 0, \ E\omega = Ep = 0.$$

Además se supone que, $E\omega^2 = \sigma_\omega^2$, $E_p^2 = \sigma_p^2$.

Dado lo anterior, se tiene que $EW^2 = \sigma_\omega^2 + \sigma_p^2$.

La estimación mínimo cuadrática de ω es entonces[15]:

[15] La expresión $E[\omega \mid W]$ se lee como "la estimación de ω dado W".

$$E[\omega \mid W] = a_0 + a_1 W, \text{ donde}$$

$$a_1 = \frac{E\,(W\omega)}{EW^2} = \left(\frac{E\,(\omega + p)\,\omega}{E\,(\omega + p)^2} \right)$$

$$a_1 = \frac{E\omega^2}{(E\omega + Ep)^2} = \frac{\sigma_\omega^2}{(\sigma_\omega^2 + \sigma_p^2)}$$

$$a_0 = E\omega - a_1 EW = 0 \tag{2.60}$$

Luego se tiene que la proyección de ω sobre W es igual a:

$$E\,[\omega \mid W] = \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_w^2 + \sigma_p^2}\,(\omega + p) = \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_\omega^2 + \sigma_p^2} W \tag{2.61}$$

La ecuación (2.61) indica la proyección óptima de ω, dado W y la estructura estocástica de las variables relevantes para efectos de esta estimación. De (2.61) se desprende que, mientras mayor sea σ_p^2 menor es el contenido informacional de los movimientos en W con respecto a la evolución de ω.

Para ilustrar el uso de este instrumental, en el Problema N° 6 se considera una aplicación de éste a la teoría del ingreso permanente.

Problema N° 6

Las ecuaciones (2.62)-(2.66) describen los supuestos básicos de la teoría del ingreso permanente, donde Yp es el ingreso permanente, Y_T es el ingreso transitorio, e Y es el ingreso observado.

$$C = kY_p \tag{2.62}$$

$$Y = Y_p + Y_T \tag{2.63}$$

$$EY_p\,Y_T = 0 \tag{2.64}$$

$$EY_T = 0 \tag{2.65}$$

$$C = k\,[E\,(Y_p \mid Y)] \tag{2.66}$$

La resolución del problema de proyección óptima planteado en (2.66) requiere hacer uso del "teorema de extracción de señales", por lo que utilizamos la técnica antes expuesta.

$$E\,[Y_p \mid Y] = a_0 + a_1 Y \tag{2.67}$$

$$a_1 = \frac{E\left[(Y_p + Y_T)\,Y_p\right]}{(\sigma_{Yp}^2 + \sigma_{YT}^2)}$$

$$a_1 = \frac{\sigma_{Yp}^2}{(\sigma_{Yp}^2 + \sigma_{YT}^2)} = \theta \tag{2.68}$$

$$a_0 = EY_p - a_1 EY$$

$$a_0 = EY_p\,(1 - a_1) = EY_p \left(\frac{\sigma_{YT}^2}{\sigma_{Yp}^2 + \sigma_{YT}^2} \right) = EY_p\,(1 - \theta) \tag{2.69}$$

luego la solución es:

$$E\,[Y_p \mid 1, Y] = EY_p\,(1 - \theta) + Y\theta \tag{2.70}$$

de donde se obtiene,

$$C = k\,[(1 - \theta)\,EY_p + \theta Y] \tag{2.71}$$

De (2.71) se puede desprende que mientras mayor sea la varianza del ingreso transitorio σ_{YT}, menor será la relación entre los movimientos del ingreso observado de las personas y el nivel de consumo de éstas.

En los capítulos siguientes se analizan temas en los que se utilizan los conceptos expuestos.

2.5. Anexo 1

2.5.1. Método Iterativo

Aun cuando el método de los coeficientes indeterminados constituye una herramienta bastante general para resolver problemas de expectativas racionales, existen otros procedimientos alternativos, que en algunos casos pueden ser utilizados. Dentro de éstos cabe mencionar el "método iterativo". Este se caracteriza por su sencillez, siendo una alternativa adecuada para problemas relativamente generales.

Para ilustrar éste consideremos la misma función de demanda 'a la Cagan' utilizada en el Problema N° 4. Esta se plantea en la ecuación (2.72). Por simplicidad se supondrá que $\gamma = 0$.

$$m_t = \alpha E_t P_{t+1} + P_t (1-\alpha) + \mu_t \qquad (2.72)$$

de aquí se deriva,

$$P_t = \frac{m_t - \alpha E_t P_{t+1} - \mu_t}{1-\alpha} = a_0 m_t + a_1 E_t P_{t+1} + a_2 \mu_t \qquad (2.73)$$

De (2.73) se obtiene –utilizando la "ley de las proyecciones iterativas"– la expresión (2.74), la que se puede reemplazar en (2.73) de donde se deriva (2.75)

$$E_t P_{t+1} = a_0 E_t m_{t+1} + a_1 E_t P_{t+2} \qquad (2.74)$$

$$P_t = a_0 m_t + a_1 a_0 E_t m_{t+1} + a_1^2 E_t P_{t+2} + a_2 \mu_t \qquad (2.75)$$

Tras sucesivos reemplazos se obtiene la ecuación (2.76), de acuerdo a la cual el nivel contemporáneo de precios es una función de la trayectoria esperada de la cantidad de dinero. Dado que $a_1 = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$, se desprende que $a_1 < 1$, lo que indica que a los individuos les preocupa más el comportamiento inmediato del dinero, por su efecto sobre la demanda contemporánea, que lo que podría ser la evolución de este variable en períodos más lejanos.

$$P_t = a_0 \sum_{i=0}^{n} a_1^i E_t m_{t+1} + a_1^{N+1} E_t P_{t+N+1} + a_2 \mu_t \qquad (2.76)$$

Para que la solución expuesta en (2.76) sea convergente se requiere se cumpla (2.77)

$$\lim_{N \to \infty} a_1^{N+1} E_t P_{t+N+1} = 0 \qquad (2.77)$$

En este caso la solución para el nivel contemporáneo de precios viene dada por (2.78),

$$P_t = a_0 \sum_{i=1}^{N} a_1^i E_t m_{t+i} + a_2 \mu_t \qquad (2.78)$$

Como se indicó, este método permite expresar, a través de un procedimiento sencillo, la influencia de las expectativas del público acerca del comportamiento futuro de alguna variable exógena –en este caso de la cantidad de dinero– sobre la variable analizada. Sin embargo, este método no ayuda a precisar de un modo riguroso el efecto de cambios en las reglas de política –en la política monetaria en el contexto del presente ejemplo– sobre las expectativas del público, cosa que sí ocurre con el método de coeficientes indeterminados. De cualquier modo, esta estrategia puede ser útil para plantear ciertos problemas en los que sólo es necesario dejar expuesta la naturaleza del proceso de formación de expectativas del público y su incidencia sobre el equilibrio de mercado.

2.5.2 Soluciones Múltiples: Burbujas

A partir del ejercicio expuesto es posible plantear un caso en el que el proceso de formación de expectativas no conduce a un equilibrio único, sino que existen múltiples posibilidades[16]. Para describir este caso denotemos como P_t^* a la solución para el nivel de precios correspondientes a la ecuación (2.73), posteriormente expresada en función de la variable exógena en (2.78). En términos generales se define entonces la variable "P_t" como la suma de una "solución fundamental" (p*) y una "burbuja" (b):

$$P_t = P_t^* + b_t \qquad (2.79)$$

[16] Un análisis extensivo de este tema se encuentra en O. J. Blanchard y S. Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, 1989, Cap. 5.